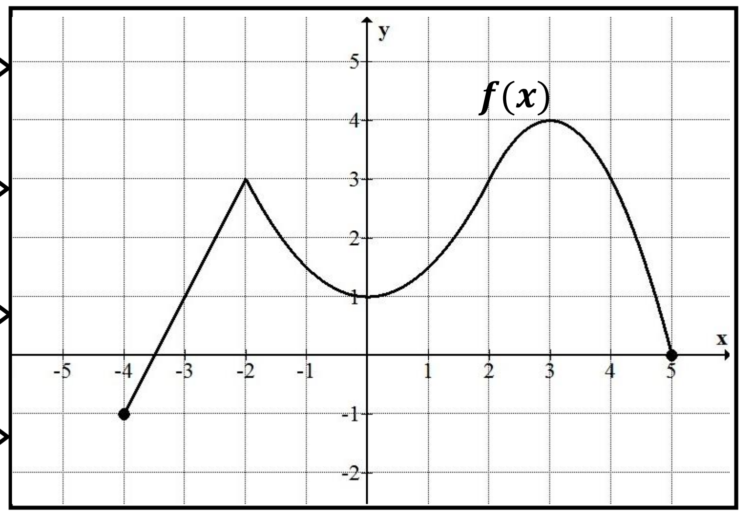
الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم
إدارة التقويم والامتحانات

إجابة النموذج التدريبي لامتحان مادة الرياضيات الفصل الدراسي الثاني للصف الثاني عشر
للقسم العلمي للعام الدراسي 2012 / 2013 م

السؤال الأول

<u>أولاً :</u> 1) لتكن $f(x)$ ، $g(x)$ دوال متصلة على الفترة $[-4\,, 5]$

فيما يلي بيان كلا من $f(x)$ ، $g'(x)$ ، من الرسم أكمل العبارات التالية :

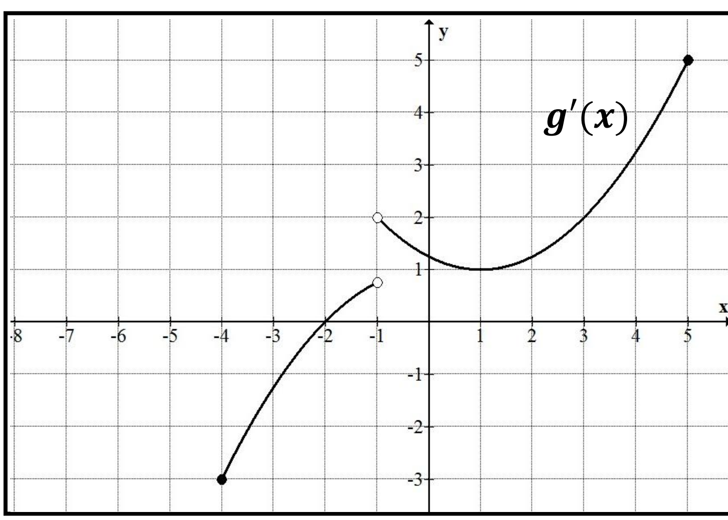


مجموعة النقاط الحرجة للدالة هي ... $\{-2\,, 0\,, 3\}$

الفترات التي تكون عندها الدالة متزايدة هي $[-4, -2]$ ،$[0,3]$

الفترات التي تكون عندها الدالة متناقصة هي $[-2,0]$ ،$[3,5]$

للدالة قيمة عظمى محلية عند x تساوي -2 ، 3 .



الفترات التي تكون عندها الدالة متزايدة هي $[-2, -1]$ ، $[-1,5]$

للدالة قيمة صغرى محلية عند x تساوي -2 ..

فترات تقعر منحنى الدالة لأسفل هي . $(-1\,, 1)$ ..

نقاط الإنقلاب للدالة هي. $(1\,, g(1))$ ، $(-1, g(-1))$

ثانياً : (2 لتكن $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & , \quad x < 2 \\ 4x^3 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$ ، والدالة غير متصلة عند $x = 2$

استخدم طرقا تحليلية (جبرية) لإيجاد القيم القصوى للدالة g

$$g'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & , \quad x < 2 \\ 12x^2 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

$$g'(x) = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \in (-\infty , 2)$$

$$12\, x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \notin (2 , \infty)$$

النقاط الحرجة للدالة هي : $x = 2 \; , \; x = 1$

الفترات	$x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
إشارة $f'(x)$	—	+	+
سلوك $f(x)$	↘	↗	↗

الدالة متزايدة على الفترات : $[1 , 2), (2 , \infty)$

الدالة متناقصة على الفترة : $(-\infty , 1]$

يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ وقيمتها : $g(1) = (1)^2 - 2(1) = -1$

ثالثاً :(3 لتكن $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين متصلتين على الفترة $[\,3 , 5\,]$ وقابلتين للاشتقاق على الفترة$(\,3 , 5\,)$.

إذا كانت $g'(x) \neq 0$ على الفترة $(\,3 , 5\,)$. باستخدام نظرية القيمة المتوسطة والجدول التالي :

x	3	5
$f(x)$	1	2
$g(x)$	4	7

أثبت أنه يوجد ثابتان c_1 , c_2 ينتميان للفترة $(\,3 , 5\,)$ بحيث أن : $g'(c_2) = 3f'(c_1)$

بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ في الفترة $[3 , 5]$ نجد أن :

يوجد $c_1 \in (\,3 , 5\,)$ بحيث : $f'(c_1) = \frac{f(5) - f(3)}{5-3} = \frac{2-1}{2} \Rightarrow f'(c_1) = \frac{1}{2}$

يوجد $c_2 \in (\,3 , 5\,)$ بحيث : $g'(c_2) = \frac{g(5) - g(3)}{5-3} = \frac{7-4}{2} \Rightarrow g'(c_2) = \frac{3}{2}$

$\because$ $g'(x) \neq 0$ على الفترة $(\,3 , 5\,)$ $\quad \therefore g'(c_2) \neq 0$

$\therefore$ بقسمة المعادلتين نجد أن :

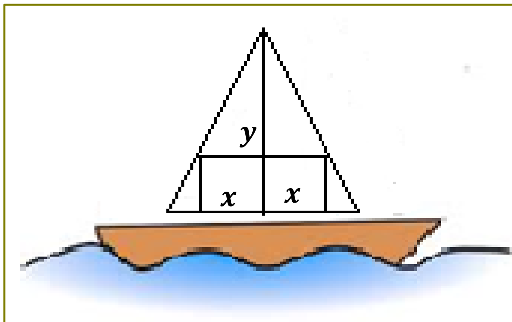
$$\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)} = \frac{1}{3} \Rightarrow g'(c_2) = 3f'(c_1)$$

السؤال الثاني

سباق القوارب الشراعية التقليدية هو سباق تستخدم فيه المراكب التقليدية تعرف باسم " دو " التي كانت تستخدم قديما في الغوص بحثا عن اللؤلؤ أو نقل البضائع.

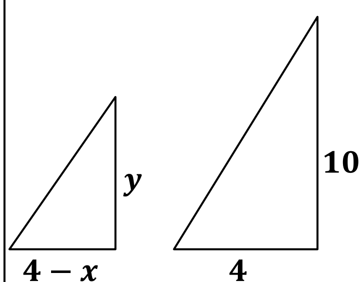
أولاً: 4) شارك سلطان في سباق القوارب الشراعية وكان شراع قاربه على شكل مثلث متساوي الساقين طول قاعدته تساوي 8 m ، وارتفاعه 10 m. أراد وضع لوحة إعلانية على شكل مستطيل بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث ويقع كل من الرأسين الآخرين على ساقي المثلث.

أوجد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن ، حيث $0 \le x \le 4$.



من تشابه المثلثين :

$$\frac{4}{4-x} = \frac{10}{y}$$



$$y = \frac{10(4-x)}{4} = 10 - \frac{5}{2}x$$

$$A = 2xy = 2x\left(10 - \frac{5}{2}x\right)$$

$$A(x) = 20x - 5x^2$$

$$A'(x) = 20 - 10x$$

$$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 - 10x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

$$A(0) = 0$$

$$A(4) = 20(4) - 5(4)^2 = 0$$

$$A(2) = 20(2) - 5(2)^2 = 20$$

$\therefore$ يوجد قيمة عظمى مطلقة عند $x = 2\,m \quad , \quad y = 10 - \left(\frac{5}{2}\right)(2) = 5m$

$\therefore$ تكون مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عند $x = 2\,m \quad , \quad y = 5m$

ثانياً: تتحرك نقطة $(x\,,y)$ على قطع مكافئ بؤرته هي النقطة $(1\,,0)$ ودليله $x = -1$, إذا علمت أن

معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن عند النقطة $(4\,,4)$ يساوي $2\sqrt{5}$

أوجد : 5) معادلة القطع المكافئ .

الرأس $(0,0)$ $\qquad \frac{1}{4a} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

معادلة القطع المكافئ على الصورة : $x = ay^2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}y^2$

6) معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة للزمن عند نفس النقطة .

$$x = \frac{1}{4}y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}y\frac{dy}{dt}$$

بالتعويض بالمعطيات :

$$2\sqrt{5} = \frac{1}{2}(4)\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{5}$$

السؤال الثالث

أولاً: إذا كانت المعادلة $\frac{(y+6)^2}{25} + \frac{(x-1)^2}{64} = 1$ تمثل قطعاً ناقصاً **أوجد :**

7) مركز القطع .

$$(h\,,k) \Rightarrow (1\,,-6)$$

8) البؤرتان .

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 64 - 25 \Rightarrow c^2 = 39 \Rightarrow c = \sqrt{39}$$

البؤرتان هما : $(h \pm c\,,k)$

$$(1 \pm \sqrt{39}\,,-6)$$

9) نقطتا طرفي المحور الأصغر .

$$(h\,,k+b) \Rightarrow (1\,,-6+5) \Rightarrow (1\,,-1)$$

$$(h\,,k-b) \Rightarrow (1\,,-6-5) \Rightarrow (1\,,-11)$$

ثانياً: إذا كانت المعادلة $2(y-1)^2 - 3x^2 + 12x - 30 = 0$ تمثل قطعاً زائداً .

10) ضع معادلة القطع في الصورة القياسية .

$$2(y-1)^2 - 3(x^2 - 4x + 4 - 4) = 30$$
$$2(y-1)^2 - 3(x-2)^2 = 30 - 12$$
$$2(y-1)^2 - 3(x-2)^2 = 18$$
$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{6} = 1$$

11) أوجد مركز القطع .

$$(h, k) \Rightarrow (2, 1)$$

12) أوجد البؤرتان .

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 6 \Rightarrow c^2 = 15 \Rightarrow c = \sqrt{15}$$
$$(h, k \pm c) \Rightarrow \left(2, 1 \pm \sqrt{15}\right)$$

13) أوجد معادلتي الخطيين التقاربيين للقطع .

$$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$$
$$y - 1 = \pm \frac{3}{\sqrt{6}}(x - 2)$$

انتهت الأسئلة مع تمنياتنا لكم بالنجاح والتوفيق